Polynômes de degré 2

Définition (*fonction polynôme du second degré*)
On appelle fonction polynôme du second degré (ou trinôme) toute fonction, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant se ramener à la forme développée :

$f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où *a*, *b* et *c* sont des réels avec $a \neq 0$

Propriété (*forme canonique*) $ax^2 + bx + c$ peut toujours s'écrire sous sa forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = f(\alpha)$. La courbe est donc toujours une parabole de sommet $(\alpha;\beta)$

Propriété : (*variations de la fonction f(x)=ax²+bx+c*)
Si $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty;\alpha[$ et croissante sur $]\alpha;+\infty[$.
Si $a < 0$, f est croissante sur $]-\infty;\alpha[$ et décroissante sur $]\alpha;+\infty[$.
Connaitre les variations permet de déterminer les maximums et/ou minimums !

Le Théorème Important : (*solutions de ax²+bx+c=0, racines du polynôme*)
Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré. On appelle discriminant(Δ) le nombre : $b^2 - 4ac$

- $\Delta < 0$: pas de solution. (le polynôme n'admet pas de racine)
- $\Delta = 0$: une seule solution $-\frac{b}{2a}$ (c'est lorsque la parabole touche l'axe en son sommet)
- $\Delta > 0$: deux solutions : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ notée x_1 et x_2. (le polynôme admet deux racines)

Remarque : (*factorisation du trinôme*) (résoudre=factoriser)
Si l'équation admet 2 solutions $x_1$et x_2 on peut écrire $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$
Si l'équation admet 1 solutions x_0 on peut écrire $ax^2 + bx + c = a(x-x_0)(x-x_0) = a(x-x_0)^2$
Si l'équation n'admet pas de solution, on ne peut pas factoriser.

Propriété (*somme et produit des racines*)
Lorsque l'équation admet 2 solutions (le polynôme admet 2 racines) $x_1$et x_2 on a : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Théorème (*signe de ax²+bx+c = résolution d'inéquations du second degré*)
$ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.
Et en particulier, lorsque $\Delta < 0$, la fonction est de signe constant. (celui de a)

Démonstrations

Propriété (*forme canonique*) $ax^2 + bx + c$ peut toujours s'écrire sous sa forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = f(\alpha)$. La courbe est donc toujours une parabole de sommet $(\alpha;\beta)$

Démonstration : On met a en facteur (ce qui possible car $a \neq 0$) : $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

Comme $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$ on peut écrire $x^2+\frac{b}{a}x = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

On a donc :

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

De plus on a $f(\alpha) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c = \frac{b^2-2b^2+4ac}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

Le Théorème Important : (*solutions de ax²+bx+c=0, racines du polynôme*)

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré. On appelle discriminant(Δ) le nombre : b^2-4ac

- $\Delta < 0$: pas de solution. (le polynôme n'admet pas de racine)
- $\Delta = 0$: une seule solution $-\frac{b}{2a}$ (c'est lorsque la parabole touche l'axe en son sommet)
- $\Delta > 0$: deux solutions : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ notée x_1 et x_2. (le polynôme admet deux racines)

Démonstration : on utilise la forme canonique $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Les cas $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$ sont aisés.

Pour $\Delta > 0$ on factorise au moyen de l'identité remarquable $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$, on obtient

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$$

En se rappelant qu'un produit est nul uniquement si l'un de ses facteurs est nul on conclut.