$\perp$ Orthogonalité et produit scalaire $\top$

I. Définition

Définition (les 4 expressions du produit scalaire de 2 vecteurs)

Suivant les informations dont on dispose sur les vecteurs, on utilise l'une des expressions suivantes :

- On dispose de l'angle que forment les vecteurs et des 2 distances (normes) :
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$
- On dispose des coordonnées dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\overrightarrow{AC}(x', y')$:
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy'$$
- On dispose de 3 distances (normes):
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$
- On dispose du projeté orthogonal, (par exemple *H le projeté orthogonal de B sur (AC)):*
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AC$$

Cas particulier : (vecteurs colinéaires)
Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :
- de même sens on obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$
- de sens contraire on obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$

II. Propriétés

LA PROPRIETE FONDAMENTALE (*orthogonalité et produit scalaire*)

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Propriété : (distance et produit scalaire)
Une distance s'exprime à l'aide d'un produit scalaire : $AB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$

Propriétés (linéarité du produit scalaire)
Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout nombre réel k ,
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

Ces propriétés permettent de décomposer un vecteur avec Chasles pour faciliter le calcul.

Petit rappel de notation : la norme d'un vecteur est sa « longueur » , elle est notée $\|\ldots\|$

De plus les règles de distributivité sont les mêmes que pour les réels, on trouve donc de la même façon des identités remarquables :

• $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v}$ • $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v}$ • $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|u\|^2 + \|v\|^2$	car $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$
$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$	Interprétation : dans un parallélogramme, la somme des diagonales au carré égale la somme des 4 côtés aux carré.

III. **Applications**

- Formule d'Al-Kashi :
  Dans un triangle ABC quelconque $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$

- L'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$
  Soit A et B deux points de milieu I alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

<u>Conséquence</u> : on obtient les démonstrations des théorèmes vus en collège :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}AB^2 \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$$

2 points A et B étant donnés, l'ensemble des points M qui rendent ABM rectangle est le cercle de diamètre $[AB]$.
et réciproquement, si un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ alors MAB est rectangle en M.

<u>Hors programme</u>
L'identité de la médiane : En partant de l'identité du parallélogramme, la somme des diagonales au carré égale la somme des 4 côtés aux carré, avec l'idée qu'une médiane est une demie diagonale :

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 = 2c_1^2 + 2c_2^2 \quad \text{donne} \quad 2\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = c_1^2 + c_2^2$$

ce qui s'écrit dans le triangle MAB avec I milieu de $[AB]$: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2AI^2$
Plus connu sous le nom théorème de la médiane : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$