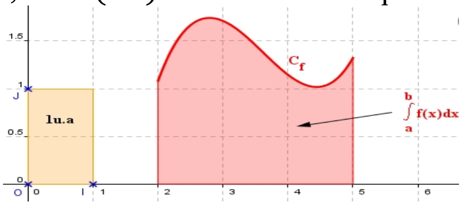
Intégrale et aire sous une courbe

I. Notions d'intégrale

Définition (intégrale d'une fonction continue)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Le nombre réel noté $\int_a^b f(t)dt$ est appelé intégrale de a à b de la fonction f.
Ce nombre représente une mesure de l'aire algébrique (peut être positif ou négatif) en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$



Remarques

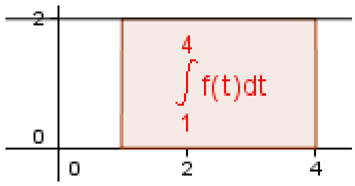
- $\int_a^b f(t)dt$ se lit : "intégrale ou somme de a à b de $f(t)\,dt$". $f(t) \times dt$ est l'aire d'un rectangle de hauteur $f(t)$ et de largeur dt.
- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- Signe de l'intégrale : si $a < b$ et $f > 0$ ce nombre est positif, si $a < b$ et $f < 0$, il est négatif, si $a > b$ et $f > 0$, il est positif, si $a > b$ et $f < 0$, il est négatif.
- La variable t est appelée variable "muette". (similarité avec $\sum_{i=1}^{5} i^2$)

On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx = \cdots$.

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

Si le repère a pour unités 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est 6 cm^2.

Exemple : Si f est une fonction constante positive k, alors $\int_a^b f(t)dt$ correspond à l'aire d'un rectangle, soit $k(b-a)$.
Sur ce dessin on a $\int_1^4 2dt = 2(4-1) = 6$.



Exercice: Représenter graphiquement et déterminer les nombres $\int_0^1 \mathbf{2t\,dt}$, $\int_1^3 \mathbf{2t\,dt}$

II. Intégrale et primitive

Théorème fondamental du calcul intégral :
Les primitives de f sont les fonctions $F(\boldsymbol{x}) = \int_a^x f(t)dt$ avec a un réel quelconque !!

Explications :Une primitive mesure donc l'aire sous la courbe de f à partir d'une nombre a quelconque.
Le choix de a détermine la valeur de la constante k. $\int_a^x f(t)dt$ est la primitive qui s'annule en a.

Exemples :Soit $f(x) = 3$ alors les primitives sont $F_k(x) = 3x + k$
et $\int_5^x f(t)dt = 3(x-5) = 3x - 15$ ou encore $\int_8^x f(t)dt = 3(x-8) = 3x - 24$ (aire d'un rectangle)

Corollaire : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Théorème LE THEOREME IMPORTANT EN PRATIQUE

Soit F une primitive quelconque de f alors : $$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Remarque : $F(b) - F(a)$ se note $[F]_a^b$

Une technique importante : (l'intégration par parties)
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées u' et v' sont continues sur I.
Soient a et b deux éléments de I. On a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Avec une autre notation : $\int_a^b F(t)g(t)dt = [F(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f(t)G(t)dt$

Remarques :
On choisit souvent pour u des fonctions affines dont la dérivée est une constante.
Pour v' *qu'il faut savoir intégrer sans que cela n'augmente la difficulté* on peut choisir des fonctions du type
$t \longmapsto e^t$; $t \longmapsto \sin(t)$; $t \longmapsto \cos(t)$; $t \longmapsto \frac{1}{t}$ dont les primitives sont
$t \longmapsto e^t$; $t \longmapsto -\cos(t)$; $t \longmapsto \sin(t)$; $t \longmapsto \ln(t)$(sur]0 ; +∞[ )
L'intégration par parties permet aussi de déterminer des primitives lorsqu'on l'applique à $\int_a^x f(t)dt$.

III. Propriétés des intégrales

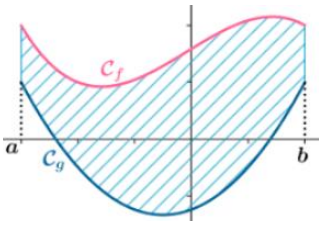
- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$ avec a, b *et* c des réels quelconques
- Linéarité de l'intégrale
  - $\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
  - $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$ avec α un réel.
- Conservation de l'ordre:

  Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a\,;\,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

  En particulier $0 \leq g(x)$ pour tout x de $[a\,;\,b]$ alors $0 \leq \int_a^b g(t)dt$

- Aire entre 2 courbes

Si f et g sont deux fonctions continues telles que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$ alors l'aire entre les 2 courbes est donnée par $\int_a^b \big(f(t) - g(t)\big)dt$.



Définition (valeur moyenne d'une fonction)
On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ le nombre réel k tel que $\int_a^b f(t)dt = k(b-a)$