L'espace

I. Les vecteurs de l'espace

Ici on ne se sert que de la « direction » d'un vecteur (peu importe sa norme et son sens).

Dans l'espace, les vecteurs suivent les mêmes règles que dans le plan. (somme, relation de Chasles,…)

Définition (*espace à 3 dimensions*)
Définir un espace à 3 dimensions c'est donner un point (l'origine) et 3 directions non coplanaires (non situées dans un même plan). On utilise des vecteurs pour donner les directions et on dit que ces vecteurs forment une base de l'espace.

Remarques :
Une droite est un espace de dimension 1, un vecteur (sa direction) permet de l'orienter.
Un plan est un espace de dimension 2, deux vecteurs non colinéaires permettent de l'orienter.
L'espace « usuel » est un espace de dimension 3, trois vecteurs non coplanaires permettent de l'orienter.

Propriété : (*coordonnées*) Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère donné.
Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit de façon unique $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x, y, z sont les coordonnées (cartésiennes) de $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u}(x, y, z)$.

Lorsque l'on parle des coordonnées d'un point A, il s'agit des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$.
$\mathrm{A}(2; -5; 6)$ est équivalent à $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$

Remarques : Les calculs sur les coordonnées s'effectuent de la même façon que dans le plan. (milieu, somme de vecteur, distance)

Propriété : (*démontrer la coplanarité*)
3 vecteurs sont coplanaires si et seulement si l'un s'exprime à partir des 2 autres sous forme d'une combinaison linéaire (une somme des vecteurs affectés chacun de coefficients)

Exemple : Si on sait que $\vec{u} = 5\vec{v} - 3\vec{w}$ alors on peut dire que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ $s$ont coplanaires.

II. Équations de droites de l'espace.

Propriété : *représentation paramétrique d'une **droite** de l'espace. (équation d'une droite)*
Une droite est caractérisée par un point et un vecteur directeur.
Une représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$ et dirigée par $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$ est le système $\begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \\ z = z_A + tz_u \end{cases}$ avec t un réel appelé paramètre.
(on peut voir les choses de la façon suivante, tout point $M(x, y, z)$ de la droite est obtenu en partant du point A et en ajoutant le vecteur $\vec{u}$ un certain nombre de fois : $M = A + t\vec{u}$)

Remarque : il existe plusieurs représentations d'une même droite : on peut choisir pour A n'importe quel point de la droite et pour $\vec{u}$ n'importe quel vecteur directeur de d. (mais tous les vecteurs directeurs sont proportionnels)

Démonstration :

$$M \in d(\mathrm{A}, \vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\ et\ \vec{u} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ \ tel\ que\ \overrightarrow{AM} = t \times \vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}\ \ tel\ que \begin{cases} x = x_A + tx_u \\ y = y_A + ty_u \\ z = z_A + tz_u \end{cases}$$

Propriété : *Position relative de 2 droites de l'espace.*
Il n'existe que 3 possibilités : sécantes, parallèles ou non coplanaires.

III. Orthogonalité et produit scalaire, équation de plan de l'espace

Propriété fondamentale : (orthogonalité de 2 vecteurs)

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul.

Calcul du produit scalaire de 2 vecteurs :

2 vecteurs de l'espace étant toujours coplanaires, leur produit scalaire se calcule de la même façon que dans le plan:

- Avec les coordonnées dans un repère orthonormé, on obtient : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' + zz'$ avec $\overrightarrow{AB}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{AC}(x', y', z')$
- Avec l'angle des vecteurs: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\hat{A})$
  donc si les vecteurs sont colinéaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \pm AB \times AC$
- Avec un projeté orthogonal : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \pm AH \times AC$ avec H le projeté orthogonal de B sur (AC) (avec Chasles !)
- Avec 3 distances : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Quelques formules avec le produit scalaire (identité remarquable, formule de polarisation)

Identités remarquables : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \times \vec{u}.\vec{v}$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \times \vec{u}.\vec{v}$

Ce qui se réécrit : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$ et : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

LA PROPRIETE IMPORTANTE : (équation cartésienne d'un plan)

Un plan $\wp$ peut être défini par la donnée d'un point A et d'un vecteur orthogonal $\vec{n}$ (on dit aussi normal) à ce plan.

(en effet a plan a 2 directions, et 1 seule direction orthogonale)

Une équation de $\wp$ est donnée par $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ qui s'écrit $ax + by + cz = d$, avec a, b, c les coordonnées de $\vec{n}$.

Exemple:

Une équation du plan $\wp$ passant par $A(1,2,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(4,5,6)$ est donnée par :

$$M(x, y, z) \in \wp \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \times 4 + (y-2) \times 5 + (z-3) \times 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x + 5y + 6z = 32$$

Remarque

Réciproquement, les objets de l'espace d'équation $ax + by + cz = d$ sont des plans.

Propriété (distance) Dans un repère orthonormé, si on a $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Remarque hors programme :
Les mots « colinéaires » et « coplanaires » sont des cas particuliers de « liés »

4 points sont coplanaires si et seulement si 3 vecteurs formés avec ces 4 points sont coplanaires.

Ex : Pour montrer que A,B,CetDsont coplanaires, on essaie d'écrire une relation liant par exemple $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD}$, comme $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 1\overrightarrow{AD}$ou $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$...

Pour montrer que A,B,CetD ne sont pas coplanaires, c'est plus délicat. Il s'agit de montrer que le système $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$n'a pas de solution (3 équations et 2 inconnues)

Propriété : (4 vecteurs dans un espace de dimension 3 : vecteurs 'co-espaçaires')
4 vecteurs sont dans un même espace de dimension 3 si et seulement si l'un s'exprime à partir des 3 autres.

n+1 vecteurs sont dans un espace de dimension n (vecteurs liés), si et seulement si l'un s'exprime à partir des n autres.

Donner aux élèves programmes ti dans répertoire Espace

Orthogonlité

MathSup : En fait il existe plusieurs produits scalaires, chacun d'eux définit une orthogonalité et une notion de distance. Il existe plusieurs orthogonalités, plusieurs distance.
autre produit scalaire (Bertault) $(x_1; y_1).(x_2; y_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2$
Ds des bases orthonormées, tout produit scalaire revient à $\sum x_i y_i$ *!!*

Passage d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique :

$$x + 2y + 6z = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x & 3 - 2y - 6z \\ y = & y \\ z & z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \\ y = \\ z \end{cases} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

Passage d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne :
Avec 2 vecteurs, on trouve le 3e qui est orthogonal.

Équation d'une droite comme Intersection de 2 plans :

$$\begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$

La deuxième donne $y = 1 - 2x$ puis la première $z = 3x - 1$

On obtient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x \\ 3x - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Géométrie sans vecteur.

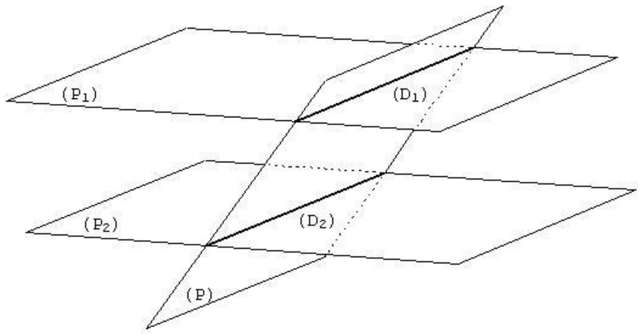
Montrer des images de sections
Jouons tout d'abord à tracer des sections (de cube)

Nous présentons un ensemble de propriétés, souvent démontrables avec des vecteurs mais dont l'énoncé n'y fait pas référence. En gras les propriétés les plus utilisées (au bac !!) (feuille à distribuer)

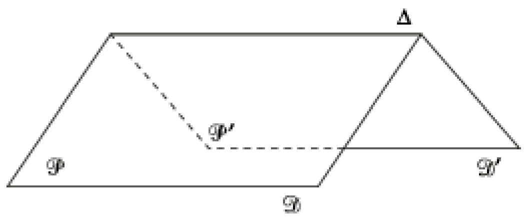
1. Parallélisme

<u>Théorème principaux</u> (enfin pour le bac…)

Pour tracer des section de cube, on utilise souvent la propriété suivante :
<u>Théorème des droites parallèles :</u>
Si 2 plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



<u>Théorème "du toit"</u> *voir Amérique Nord juin 2015 (typiquement, pyramide à base carrée)*
Soit 2 droites parallèles d_1 et d_2, un plan P_1 contenant d_1 et un plan P_2 contenant d_2.
Si P_1 et P_2 sont sécants alors leur droite d'intersection est parallèle à d_1 et d_2.

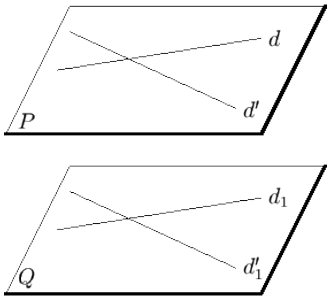


<u>Autres théorèmes :</u>

<u>Propriétés (parallélisme de droite)(admises)</u>
- Si 2 droites sont parallèles, alors toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
- Si 2 droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.

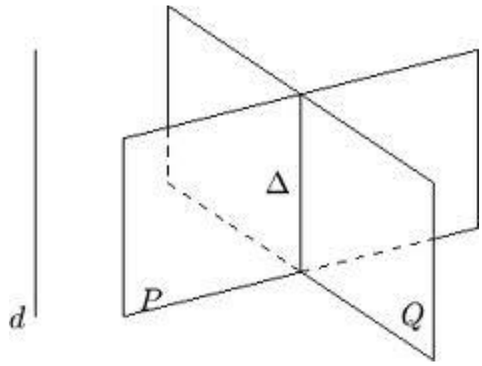
<u>Propriétés (parallélisme de plan)(admises)</u>
- Si 2 plans sont parallèles, alors tout plan parallèles à l'un est parallèle à l'autre. (*extension*)

Pour montrer que 2 plans sont parallèles, 2 droites de chaque plan suffisent.
- Si 2 droites sécantes d'un plan P sont parallèles respectivement à 2 droites sécantes d'un plan P', alors P et P' sont parallèles.

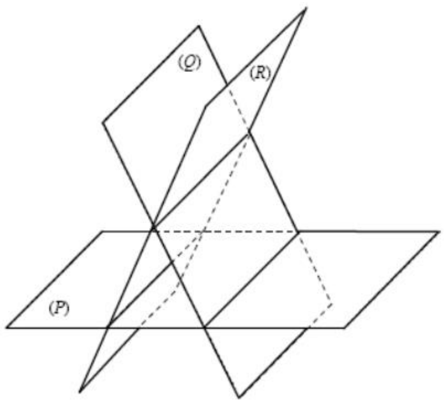


Propriété (parallélisme d'une droite et d'un plan)(admises)

- Si 2 droites sont parallèles, tout plan qui contient l'une est parallèle à l'autre. *(porte)*



- Si une droite d et un plan P sont parallèles alors tout plan contenant d et sécant à P coupe P selon une droite parallèle. *(porte)*



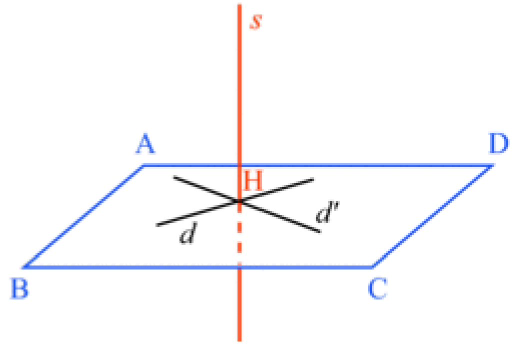
2. Orthogonalité

Définition (orthogonalité d'une droite et d'un plan)

Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toute droite du plan.

Propriété

Une droite d et un plan P sont orthogonaux ssi d est orthogonale à 2 droites sécantes du plan.

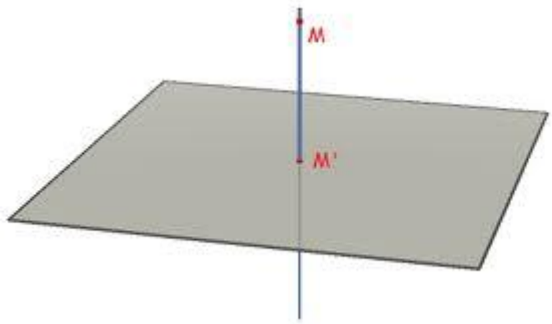


Propriété (projeté orthogonal sur un plan)

Soit P un plan et M un point de l'espace.

Il existe une unique droite passant par M et orthogonale à P.

Le point d'intersection de cette droite et du plan P est appelée projeté orthogonal de M sur P.



Propriétés(admises) (et évidentes !)

- Si 2 droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si 2 droites sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles.
- Si 2 plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si 2 plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèles.