Primitives et équations différentielles

Définition
Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction. On dit que la fonction $\boldsymbol{F}$ est une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur un intervalle I si $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$.

Propriété (unicité à une constante près !)
Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sont de la forme $F + k$ ou k est une constante.

Preuve : Soit F et G deux primitives de f alors $F' = G' = f$ donc $(G - F)' = 0$ donc $G - F$ est une constante donc $G - F = k$ et donc $G = F + k$

Exemple : Si $f(x) = x$, les primitives sont les fonctions $F_k(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$.

On ne sait pas primitiver en général. On essaie de reconnaitre des formules de dérivées. Voici les plus courantes :

Soit u est une fonction dérivable sur I, alors :
- $u'e^u$ se primitive en e^u
- $\frac{u'}{u}$ se primitive en $ln(u)$ ou $ln(-u)$
- $u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$ se primitive en $\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

  en particuliers : $\alpha = -2$ donne $\frac{u'}{u^2}$ qui se primitive en $-\frac{1}{u}$

  $\alpha = -\frac{1}{2}$ donne $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ qui se primitive en $2\sqrt{u}$
- $u' \cos u$ se primitive $\sin u$ et $u' \sin u$ en $-\cos u$

(on peut rédiger ainsi : f est de la forme $u'e^u$ donc une primitive est $F = e^u$)

Remarque : (*fonction qui n'admet pas de primitive*)
La fonction partie entière n'admet pas de primitive car la potentielle primitive ne serait pas dérivable en 1,2, ...

Propriété (*condition suffisante pour admettre une primitive*)
Toute fonction continue admet une primitive (la réciproque est fausse, il existe des fonctions qui admettent des primitives (ce sont donc des fonctions dérivées) sans être continues Gaston Darboux en a trouvé !)

Définition : (*équations différentielles*):
Une équation différentielle ("équadiff " pour les initiés) est une équation dont **l'inconnue est une fonction ! (on note souvent $\boldsymbol{y(x)}$ voire $\boldsymbol{y}$ cette fonction)**, et où interviennent des dérivées de cette fonction. La fonction exponentielle (qui est égale à sa dérivée) joue un rôle central dans la résolution.

Théorème (solutions des équations de la forme "$y' = ay$" et "$y' = ay + b$" avec a et b des réels)

- $y' = ay$ admet pour solutions les fonctions $y(x) = ke^{ax}$, avec k une constante réelle.
- $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec k une constante réelle.

(il y a autant de solutions que de constante k, lorsque l'on dessine les courbes des solutions, elles recouvrent tout le plan.)

Preuve : ($y' = ay$ admet pour solutions les fonctions $y(x) = ke^{ax}$)
- Analysons, si la fonction z était une solution, alors, en la multipliant par e^{-ax} et en dérivant on obtiendrait : $(ze^{-ax})' = z'e^{-ax} - aze^{-ax} = (z' - az)e^{-ax} = 0$ donc $ze^{-ax} = k$ et donc $z = ke^{ax}$. On en déduit que nécessairement toute solution est de la forme ke^{ax}.
- Faisons la synthèse, si des solutions existent elles sont forcément de la forme $x \longmapsto ke^{ax}$, ces fonctions conviennent-elle ? Il est facile de vérifier que oui ;)

Remarque (*primitive et équation différentielle*)
Les primitives d'une fonction f sont aussi les solutions de l'équation différentielle basique " $y' = f$ "

Propriété (*ajout d'une condition du type* $y(10) = 23$)
Il n'existe qu'une seule solution vérifiant simultanément l'équation différentielle et une condition du type $y(\alpha) = \beta$.
(l'ensemble « équation + condition » s'appelle un problème de Cauchy)

Exemples :

- Les solutions de "$y' = 8y$" sont les fonctions $y(x) = ke^{8x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

La seule fonction vérifiant y'=8y $et\ y(0) = 4$ est la fonction $y(x) = 4e^{8x}$

- Les solutions de "$y' = 8y + 7$" sont les fonctions $y(x) = ke^{8x} - \frac{7}{8}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

La seule fonction vérifiant y'=8y+10 $et\ y(0) = 4$ est la fonction $y(x) = \frac{39}{8}e^{8x} - \frac{7}{8}$

- Les solutions de "$y'(x) = 2x$" sont les primitives de $x \mapsto 2x$, ce sont les fonctions $x \mapsto x^2 + k$. Une seule est telle que $y(2) = 7$, il s'agit de $x \mapsto x^2 + 3$.

Remarque :
Les « équatdiff » sont beaucoup utilisées en physique : équation de la chaleur, corde vibrante, …
La notation $\frac{dy}{dx}$ au lieu de y' est fréquemment employée.