Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, comme la racine carrée est la fonction réciproque de la fonction carrée. La fonction exponentielle est strictement croissante de $]-\infty;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$, donc chaque image admet un unique antécédent. La fonction qui donne cet antécédent à partir de l'image est le logarithme népérien.

<u>Définition</u> : (fonction ln)
On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la fonction qui à tout réel x <u>strictement positif</u>, fait correspondre l'unique antécédent de x par la fonction exponentielle.
« ln » est la fonction réciproque de « exp », ainsi $ln(a) = b$ si et seulement si $e^b = a$.
La courbe représentative de ln se déduit de celle de exp par la symétrie d'axe $y = x$

<u>Remarque</u> : Notez bien que le domaine de définition de la fonction ln est $]0\,;+\infty[$
Par exemple « $ln(-x^2+5x-6)$ » n'existe que lorsque $x \in]2;3[$.

<u>Conséquences immédiates :</u>

$\ln(1) = 0$ *car* $e^0 = 1$	pour $x > 0$, $e^{\ln x} = x$	$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ (bijection)
$\ln(e) = 1$ *car* $e^1 = e$	pour tout x, $ln(e^x) = x$	$\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ (bijection croissante)

La fonction exponentielle transforme une somme en produit,la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme.

<u>Propriétés algébriques</u>
Pour tout $a > 0$ *et* $b > 0$, $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$
On en déduit :
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$, et aussi $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

<u>Étude de la fonction ln</u>
La fonction ln est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$!!! Elle est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Comme $\ln(1) = 0$ on en déduit que $0 < x < 1 \Rightarrow ln(x) < 0$ et $x > 1 \Rightarrow ln(x) > 0$
Enfin les limites aux bornes du domaine $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

<u>Fonctions du type $x \mapsto \ln(u(x))$</u>
Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction $ln \circ u$ (qui à x associe $ln(u(x))$) est dérivable sur I, et $(ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$
<u>Exemple</u> : Si $f(x) = ln(-x^2+5x-6)$ (lorsque $x \in]2;3[$) alors $f'(x) = \frac{-2x+5}{-x^2+5x-6}$

<u>Propriétés concernant les formes indéterminées : théorème des croissances comparées</u>

x, x^2, x^3, ... l'emportent sur $\ln(x)$.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^3} = \cdots = 0$ (et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{ln(x)} = \cdots = +\infty$)
- $\lim_{x\to 0^+} x ln(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 ln(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 ln(x) = \cdots = 0$

Une dernière limite pour impressionner vos camarades : $\lim_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$

En physique on utilise plus volontiers la fonction log qui est la réciproque de $x \mapsto 10^x$. $\log(x)$ est grosso modo le nombre de chiffres de x, par exemple $\log(123456) \simeq 6$. log et ln sont proportionnels, $log = \frac{1}{\ln(10)} ln$