Loi binomiale

La loi binomiale est une loi de probabilité, c'est-à-dire un tableau qui à chaque valeur associe sa probabilité

1. Une expérience qui n'a que 2 issues : l'expérience de Bernoulli

Définition (expérience de Bernoulli et loi de Bernoulli)
Une expérience à 2 issues (appelons les issues S (succès) et E (échec)) est appelée expérience de Bernoulli. On note généralement p la probabilité du succès. La loi de l'expérience, est donc

issues	proba
S	p
E	$1-p$

Si on considère une variable aléatoire X qui à S associe 1 et à E associe 0, alors X admet pour loi de probabilité

Valeurs de X	proba
1	p
0	$1-p$

Ce tableau est appelé loi de Bernoulli de paramètre p.

Le fait de créer cette variable aléatoire (aussi simple) va permettre de compter le nombre de succès lorsqu'on répète plusieurs fois de suite cette expérience à 2 issues. Le nombre de succès sur n tentatives (essais) sera donné par $\sum X_i$

Propriété (espérance, variance, écart-type de la loi de Bernoulli) : Si X suit une $B(p)$ alors la variance de X est $E(X) = p$ et sa variance est $V(X) = p(1-p)$ et donc son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

2. Répétition de plusieurs épreuves de Bernoulli : la loi binomiale

Propriété : Lorsqu'on enchaîne plusieurs expériences indépendantes à la suite, les probabilités des issues finales sont les produits des probabilités des issues de chaque expérience.

Définition-propriété (*schéma de Bernoulli, loi binomiale*)
Considérons l'expérience qui consiste à répéter n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes, chacune de probabilité p de succès. (on parle d'un schéma de Bernoulli).
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur n essais est tel que :

Pour tout k de $\{0,1,..,n\}$, $\quad p(\text{"}X=k\text{"}) = \binom{n}{k}(p)^k(1-p)^{n-k}$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p et on note $B(n,p)$.
Par exemple la loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = 0.7$ est

Nb de succès	proba
4	$\binom{4}{4}(0.7)^4(0.3)^0 \approx$
3	$\binom{4}{3}(0.7)^3(0.3)^1 \approx$
2	$\binom{4}{2}(0.7)^2(0.3)^2 \approx$
1	$\binom{4}{1}(0.7)^2(0.3)^3 \approx$
0	$\binom{4}{0}(0.7)^1(0.3)^4 \approx$

Remarque :
"$\binom{n}{k}$" désigne un nombre entier, c'est le nombre de façon qu'il y a de choisir k objets parmi n disponibles.
Par exemple $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{4}{2} = 6, \dots$
L'univers de cette expérience comporte 2^n issues. Si $n = 3$ on a est $\Omega = \{SSS, SSE, SES, SEE, ESS, ESE, EES, EEE\}$
Qui s'écrit aussi $\{S,E\} \times \{S,E\} \times \{S,E\} = \{S,E\}^3$.
X est la somme de variable aléatoires suivant une loi de Bernoulli $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Propriété (espérance, variance, écart-type d'une loi binomiale) :
$E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Remarque: (intervalle de fluctuation)
On cherche parfois à déterminer un intervalle $[a,b]$ tel que $\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) \geqslant 95\%$.