Dénombrement

Définition : partie *vs* liste (de l'importance de l'ordre des éléments)
Soit E un ensemble contenant n éléments. (on dit de cardinal n)(*les éléments sont nécessairement distincts*)

- Une partie de E (appelée aussi combinaison de E) est un sous-ensemble de E. L'ordre n'intervient pas et il n'y a pas de répétition. On note les éléments d'une partie entre accolades.
- Une liste (ou tuple) est une liste ordonnée d'éléments de E. Les répétitions sont possibles. On note les éléments d'une liste entre parenthèses.
- Les listes dont les éléments sont distincts (donc sans répétition) sont appelés arrangements.

Exemple : Soit $E = \{1; 2; 3\}$ (E est l'ensemble qui contient 3 éléments noté ici "1", "2" et "3")

- Les parties à 2 éléments de E sont $\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{3; 2\}$; Il y en a 3.
- Les listes à 2 éléments sont $(1; 1); (2; 2); (3; 3); (1; 3); (3; 1); (1; 2); (2; 1); (3; 2); (2; 3)$. Il y en a $3^2 = 9$
- Les arrangements à 2 éléments sont $(1; 3); (3; 1); (1; 2); (2; 1); (3; 2); (2; 3)$. Il y en a 6

Remarques :
On note $\wp(E)$ l'ensemble de toutes les parties possibles de E.(celles à 1 éléments, celles à 2 éléments, …) (combien y en a-t-il ?)
Une liste à 2 éléments est appelée un *couple*, à 3 éléments un *triplet*, à n éléments un n-*uplet*.
Les 9 couples précédents forment l'ensemble noté $\{1; 2; 3\} \times \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3\}^2$;
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets (a, b, c) de 3 réels. (par exemple les coordonnées d'un point de l'espace)

Définition : factorielle d'un entier n
On note $n!$ le nombre $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$ et par convention $0! = 1$

Exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

PROPRIETE PRINCIPALE (dénombrement des parties et listes d'un ensemble):
Soit un E un ensemble à n éléments.

- nombre de listes à p éléments : n^p
- nombre de listes à p éléments distincts (p-arrangement) : $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$
- nombre de façons d'ordonner p éléments distincts (nombre de permutations) : $p!$
- nombre de parties à p éléments (p-combinaison) : $\frac{(n\times(n-1)\times...\times(n-p+1))}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

Définition : (coefficient binomial)
Le nombre $\frac{n!}{(n-p)!p!}$ se note $\binom{n}{p}$ et est appelé coefficient binomial "p parmi n" (n et p sont des entiers $p \leq n$.)

Exemples : $\binom{5}{1} = 5$; $\binom{5}{3} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$; $\binom{5}{0} = 1$ (il n'y a qu'une seule partie à 0 élément, c'est l'ensemble vide $\emptyset$)

Propriétés des coefficients binomiaux

- Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Formule du capitaine (HP) : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$
- Formule du clermontois Blaise Pascal: $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ d'où la construction suivante : *faire ici le tableau*

Remarques : Les coefficients binomiaux permettent d'écrire les développements $(a+b)^n$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Propriété : Le nombre total de parties d'un ensemble à n éléments, le cardinal de $\wp(E)$, est 2^n. On a donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
Considérons une partie A d'un ensemble E. Pour tout x de E, si $x \in A$ on lui affecte 1 et 0 sinon. À chaque partie correspond un n-uplets dans $\{0; 1\}$.

$$E = \{Alice, Bob, Claire, Damien\}$$

listes	*arrangements*	*parties*
Combien y a-t-il de possibilités si on récompense le(la) $1^{er(e)}$ en math et le(la) $1^{er(e)}$ en physique ?	Combien y a-t-il de podiums possibles (1^{er} et 2^{e}) après une course en sprint ?	Combien y a-t-il de choix possibles pour former une équipe de 2 personnes ?