Le raisonnement par récurrence

Certaines propriétés que l'on doit démontrer ne concernent **que les entiers naturels**.

Par exemple,

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est multiple de 3.
- Montrer pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq 6n + 7$.
- …

Il existe une façon de démontrer ce type de propriété. C'est le raisonnement par récurrence.

Axiome de récurrence :
Soit $P(n)$ une propriété définie pour un entier naturel n.
Si P vérifie les 2 conditions suivantes :

- Initialisation : P est vraie pour un entier initial, en général 0 ou 1.
- Hérédité : Pour tout k entier, le fait que P soit vraie pour k entraine que P est vraie pour $k+1$.

Alors
P est vraie pour tout entier supérieur à l'entier initial.

Remarque :
Il existe des propriétés qui sont héréditaires mais jamais vraies (par exemple « $4^n + 1$ multiple de 3 »)

Exemples : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est multiple de 3.

Appelons $P(n)$ la propriété « $4^n + 5$ est multiple de 3 »

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a $4^0 + 5 = 6$ et 6 est un multiple de 3. Donc P est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : Soit k un entier, supposons que P est vraie pour k : $4^k + 5$ est un multiple de 3, donc $4^k + 5$ s'écrit $3N$, avec N un entier. Donc $4^k + 5 = 3N$ donc $4^k = 3N - 5$

Montrons que P est vraie pour l'entier $k+1$, c'est-à-dire montrons que $4^{k+1} + 5$ est multiple de 3.

On part de $4^k + 5 = 3N$
En multipliant par 4, on obtient $4 \times (4^k + 5) = 4 \times 3N$ donc $4^{k+1} + 20 = 12N$,
puis en enlevant 15, on obtient $4^{k+1} + 5 = 12N - 15$.
Or $12N - 15 = 3(4N - 5)$ est bien un multiple de 3
Donc P est vraie pour l'entier $k+1$

- Conclusion : Initialisée à $n = 0$ et héréditaire, la propriété P est vraie pour tout $n \geq 0$