Suites

<u>Remarque</u> : Les suites sont des fonctions particulières (le domaine de définition est $\mathbb{N}$), donc les propriétés et théorèmes concernant les limites des fonctions (règles opératoires, croissance comparée,..)s'appliquent. Pour les suites, seule la limite lorsque $n \longrightarrow \infty$ est étudiée.

<u>Vocabulaire</u> :

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ on dit que la suite converge vers l. (on ne parle pas d'asymptote pour les suites :(
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ on dit que la suite diverge vers $\pm\infty$.
- Si la limite n'existe pas on dit que la suite diverge. Comme ($(-1)^n$) par exemple.

<u>Propriété</u> : (limite de la suite géométrique q^n)

- Si -1 $< q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (c'est le cas important)
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ (ce démontre avec le lemme de Bernouilli)
- Si $q < -1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ n'existe pas ! comme $(-1)^n$

<u>Remarque</u> : Pour les suites arithmétiques, c'est évident, elles sont de la forme $u_n = an + b$ donc leur limite est $\pm\infty$.

<u>Lemme de Bernouilli :</u> Pour tout $x \geqslant 0$ et tout entier n , $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

<u>Preuve</u>. $x \longmapsto (1+x)^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ car $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \geqslant 0$ donc la courbe est au-dessus de sa tangente en 0 : $y = 1 + nx$.
Remarque : on peut aussi prouver par récurrence sur n, mais c'est plus long.

Prouvons maintenant que si 1$< q$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Si $q > 1$ alors q s'écrit $q = 1 + a$ avec $a > 0$ donc $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$. Comme $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + na = +\infty$, donc par comparaison $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Définition (suite majorée, suite minorée, suite bornée)
On dit que u est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$
On dit que u est minorée s'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \geqslant M$
On dit que bornée si majorée minorée.

Théorème d'existence de la limite d'une suite monotone (TELSM)

Si u est croissante alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe. (c'est-à-dire que soit u converge vers réel ℓ soit u diverge vers $+\infty$)

Corollaire (**théorème fondamental** des suites croissantes majorées):

Si u est croissante **et** majorée alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe et est un réel ℓ

Corollaire 2 :

Si u est croissante **et** non majorée alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe et vaut $+\infty$

Remarques :
Une suite croissante ne peut pas avoir un comportement limite imprévisible.
On dispose d'un résultat analogue pour une suite décroissante (et minorée).
Ce théorème, comme le *TVI*, montre l'existence d'une limite sans la calculer. Pour l'obtenir, dans le cas d'une suite définie par récurrence, on résout "$x = f(x)$"

Théorème : (Obtention de la limite d'une suite convergente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$)
Soit u une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue.
Si on sait que u converge, alors sa limite ℓ est l'une des solutions de l'équation "$x = f(x)$"

Preuve : $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, en passant à la limite $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)$.
$\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} u_n)$ car f continue. Donc $\ell = f(\ell)$