Fonctions continues

<u>Définition</u> : (fonction continue en a)
Soit f une fonction définie sur un domaine D. et a un réel de D.
On dit que :

- f est continue à gauche de a si $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.
- f est continue à droite de a si $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$
- f est continue en a si f est continue à gauche et à droite de a.

(f est continue en a revient à dire $f(a) = f(a+) = f(a-)$)

Dans la littérature, on trouve $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ *sans distinction h>0 et h<0 ce qui est sous-entendu.*

On dit que f est continue sur un intervalle entier I, si f est continue en tout nombre a de I.

<u>Exemples</u> :

- Fonction non continue en 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 0 \ si \ x < 3 \\ f(x) = 1 \ si \ x \ \geq 3 \end{cases}$
On a

$f(3) = 1$	$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 0$

Les 3 valeurs ne sont pas égales donc la fonction n'est pas continue en 3.

<u>Exemple à connaître</u>
La fonction « partie entière » n'est pas continue en $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ et est continue partout ailleurs.
La fonction « de la poste », qui donne le tarif en fonction du poids de la lettre n'est pas continue en quelques valeurs.

<u>Propriété</u>
Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues sont des fonctions continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

<u>Théorème :</u> (Continuité et dérivabilité)
Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Démonstration Puisque f est dérivable en a, alors : $f(x) = \overbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}^{\xrightarrow[x \to a]{} f'(a)} \times \overbrace{(x-a)}^{\xrightarrow[x \to a]{} 0} + f(a) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, donc en effet f est continue en a. ■

<u>Remarque</u> : la réciproque est fausse.

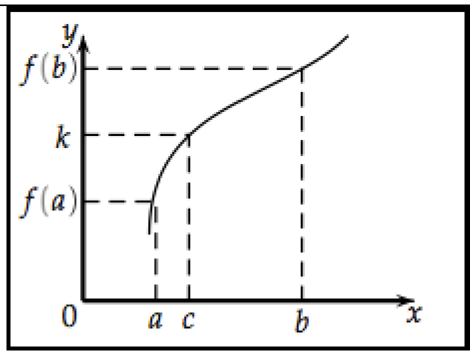
Exemple de fonction continue mais non dérivable en 0 : la fonction valeur absolue

Remarque : Au bac, on utilise généralement la dérivabilité, il est donc inutile de démontrer la continuité.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) (existence de solution à l'équation "$f(x) = k$")

<table>
<tr>
<td>
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. et k un nombre réel.
Si

f est continue sur I.
il existe un nombre $a \in I$ tel que $f(a)$ est supérieur à k et il existe b de I
tels que $f(b)$ est inférieur à k.

Alors
l'équation "$f(x) = k$" admet au moins une solution.
De plus cette solution est comprise entre a et b.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

C'est un théorème qui affirme l'existence mais il ne permet pas de trouver la ou les solutions.

Corollaire : Si de plus f est strictement monotone, la solution est unique.

C'est un théorème d'existence et d'unicité : lorsque l'on a trouvé une solution on s'arrête !

Remarque : (extension du corollaire)
Nous admettrons que ce théorème se prolonge dans le cas où les images sont de la forme $f(+\infty)$ et $f(-\infty)$ (c'est-à-dire des limites 😊)

Exemple de rédaction
Soit $\boldsymbol{f: x \longmapsto x^5 + 5x}$
Montrer que l'équation $f(x) = 24$ admet une unique solution α sur [0 ;2]. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près.

- f est une fonction polynôme donc continue sur [0 ;2].
- f est strictement croissante sur [0 ; 2], en effet f est un polynôme, donc dérivable sur [0 ;2] de dérivée $\boldsymbol{f': x \longmapsto 5x^4 + 5}$ qui est strictement positive sur [0 ;2].
- On a $f(0) = 0$ et $f(2) = 42$, donc 24 est bien compris entre $f(0)$ et $f(2)$ $(f(0) \leq 24 \leq f(2))$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 24$ admet une unique solution sur [0 ;2].

On résout à la machine, on obtient 1.727050..

À la calculatrice on obtient $f(1.72) \leq 24$ *et* $f(1.73) \geq 24$
D'après le théorème, $f(x) = 24$ admet une unique solution sur [1.72 ; 1.73].

Comme l'intervalle est de longueur 0.01, tout nombre de cet intervalle est distant de la solution de moins de 0.01.

On a $\alpha \approx 1.72$ à 10^{-2} près .

Vocabulaire :
Lorsque f est continue et strictement monotone, on dit que f réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b) ; f(a)]$). La fonction qui à chaque image associe l'antécédent est appelée fonction réciproque de f (fonction retour) et se note f^{-1}. Par exemple la fonction carré et la fonction racine carrée sont réciproque l'une de l'autre.