Limites de fonctions

Remarque liminaires :
La calculatrice donne toutes les limites, pas le droit de donner une réponse fausse au DS !
Limite est une notion dynamique ! Où va le nombre $f(x)$ lorsque le nombre x va vers ….
L'infini n'est pas un nombre, c'est un concept qui réserve des surprises, voir l' Hôtel de Hilbert …
.

I. Détermination pratique d'une limite (pas avec la définition)

Attention aux confusions entre la variable x que l'on dirige, maîtrise, et les images f (x) que l'on observe.

Il s'agit d'étudier les valeurs que prend $f(x)$ lorsque la variable x tend vers des valeurs particulières (valeurs interdites,$+\infty$.) La courbe de la fonction f permet de répondre facilement à ces questions.

Notation :
$f(x)$ tend vers 3 lorsque x tend vers $+\infty$ se note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ ou $f(+\infty) = 3$
ou encore « si $x \to +\infty$ alors $f(x) \to 3$ »

Remarque : une limite peut être atteinte ou pas.

Propriété :
Les valeurs de $f(x)$ ne peuvent se comporter que de 3 façons lorsque x tend vers une valeur:

- se stabiliser vers une valeur finie comme 10.
- se diriger vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
- avoir un comportement que l'on ne peut déterminer. Il n'y a pas de limite.

Définition (asymptote horizontale)
Lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$on dit que la droite d'équation $y = l$est **asymptote horizontale** à la courbe de *f*.
(*permet de répondre à la question « que peut-on en déduire géométriquement ? »*)

Définition (asymptote verticale)
Lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$on dit que la droite d'équation $x = a$est **asymptote verticale** à la courbe de *f*. (*permet de répondre à la question « que peut-on en déduire géométriquement ? »*)

Remarque : la courbe et sa droite asymptote se rapprochent infiniment près l'une de l'autre.

Propriété : Limite de la fonction exponentielle.

- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration :

- En $+\infty$: On va comparer avec « $x + 1$ » qui tend vers $+\infty$.

Comme exp est convexe sur $\mathbb{R}$, donc au-dessus de ses tangentes on obtient $exp(x) \geqslant x + 1$
Puis $\lim_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- En -∞ : On utilise la limite en $+\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} e^{--x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$

1. Les règles opératoires et le cas des formes indéterminées

<u>Voir le tableau des règles des opérations :</u>

Les tableaux permettent de donner les limites des fonctions de référence, x^2, $\frac{1}{x}$, certains polynômes, mais on rencontre aussi des formes indéterminées

<u>Formes indéterminées</u> : les tableaux comportent des formes indéterminées, elles sont de 4 types :

$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ $0 \times \infty$ et $\infty \pm \infty$

<u>Exemple</u> : On souhaite déterminer la limite du nombre $3x^2 + 1$ lorsque x tend vers $+\infty$.
On dit $3 \times (+\infty)^2 + 1$ donne $+\infty$.
On rédige $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\mathrm{x}^2 + 1 = +\infty$ par règles opératoires.

<u>Remarques</u> :

- Certaines fonctions vont « plus vite » que d'autres, par exemple lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x^2}$ va plus vite vers 0 que $\frac{1}{x}$.
- Attention à $\frac{0}{+\infty}$ et à $\frac{\infty}{0}$ qui ne sont pas des formes indéterminées : $\frac{0}{+\infty}$ vaut 0 et $\frac{\infty}{0}$ vaut ∞
- Les suites sont des cas particuliers de fonctions. On étudie les valeurs de $u(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ uniquement, en effet n ne tend jamais vers $-\infty$ ou vers une valeur comme 3 !

2. Propriétés permettant de lever l'indétermination

<u>Remarque</u> : il suffit parfois de factoriser le terme « le plus rapide» pour lever l'indétermination. Pour les polynômes (et les fractions rationnelles) la factorisation revient à ne considérer que le terme de plus haut degré.

<u>Exemple</u> : Donner la limite de $\frac{2x^3-4x^2+5}{x^2+x+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\frac{2x^3-4x^2+5}{x^2+x+1} = \frac{x^3(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{x(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

Par règles opératoires (cf tableau)

$2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}$ tend 2, $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ tend vers 1, donc $\frac{x(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$ tend vers $+\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2+x+1} = +\infty$

<u>1er théorème de comparaison</u> :

Si $f(x) < g(x)$ pour « x assez grand » et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

<u>2eme théorème de comparaison : (théorème des gendarmes)</u>

Soit f, g_1et g_2 3 fonctions vérifiant, pour «x assez grand », $g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x)$
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$;

<u>Remarque</u> :

- Ce théorème s'applique également lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un réel a.
- Ce théorème s'applique particulièrement avec les fonctions circulaires sinus et cosinus en partant de $-1 \leq cos(x) \leq 1.$ ou de $-1 \leq sin(x) \leq 1.$

Exemple : on montre ainsi facilement que $\frac{sin(x)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Les théorèmes des croissances comparées
(À l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les polynômes qui l'emportent sur les logarithmes)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = \cdots = +\infty$ (et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \cdots = 0$)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x = \cdots = 0$

Attention il faut bien faire apparaître exactement ces formules dans la rédaction.

Démonstration de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ *(l'idée est de montrer que $\frac{e^x}{x^n} > x$ à l'infini)*
On sait que $exp(X) \geqslant X+1$ donc $exp(X) \geqslant X$
Soit n fixé, prenons $X = \frac{x}{n+1}$ alors $exp(\frac{x}{n+1}) \geqslant \frac{x}{n+1}$
puis élevons à la puissance $n+1$, qui est croissante, on obtient
$exp(x) \geqslant \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \quad x^{n+1}$
divisons par x^n pour obtenir $\frac{exp(x)}{x^n} \geqslant \left(\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right) x$
Par comparaison, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Cas particulier : reconnaître la limite d'un taux de variation d'une fonction dérivable

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

II. Approche théorique

Regardons pour commencer la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ qui est un cas particulier de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Définition ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$)
Dire que les images $f(x)$ ont pour limite $+\infty$ signifie que l'on peut trouver une valeur de x au delà de laquelle toutes les images seront strictement supérieures à n'importe quel nombre réel A que l'on s'est fixé (aussi grand soit-il).
(*la valeur de x à trouver dépend de A*)

Exemple : Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Prenons des exemples :
Pour $A = 100$, la valeur de x est 10 car dès que $x > 10$on a $x^2 > 100$
Pour $A = 1000000$, la valeur de x est 1000 car dès que $x > 1000$on a $x^2 > 1000000$

Le cas général
Pour A quelconque (*mais positif*) , la valeur de x est $\sqrt{A}$ car dès que $x > \sqrt{A}$ on a $x^2 > A$.

Définition ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$)
Dire que les images $f(x)$ ont pour limite le nombre l signifie que l'on peut trouver une valeur de x au delà de laquelle toutes les images seront contenues dans n'importe quel intervalle ouvert contenant l que l'on s'est fixé (aussi petit soit-il). (*la valeur de x à trouver dépend de la taille de l'intervalle*)

Remarque : dans la définition précédente ($\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$), « toutes les images seront strictement supérieures à n'importe quel nombre réel A » est équivalent à « toutes les images seront contenues dans n'importe quel intervalle ouvert $]A\,;\,+\infty\,[$ »

Exemples :Montrons que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Prenons des exemples :
Pour l'intervalle$]-0{,}1;0{,}1[$, la valeur de *x* est 10 car dès que $x > 10$ on a $\frac{1}{x} < 0{,}1$ et comme $\frac{1}{x} > 0$ on a bien $-0{,}1 < \frac{1}{x} < 0{,}1$.

Pour l'intervalle $]-10^{-4};10^{-4}[$, la valeur de *x* est 10 000 car dès que $x > 10000$ on a $\frac{1}{x} < 10^{-4}$ et comme $\frac{1}{x} > 0$ on a bien $-10^{-4} < \frac{1}{x} < 10^{-4}$.

Le cas général
Pour α quelconque (*mais positif*) , les *f* (*x*) sont tous contenus dans $]-\alpha;\alpha[$dès que $x > \frac{1}{\alpha}$.

Remarque (le cas de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)
La définition est la même en remplaçant « toutes les images seront strictement supérieures à A » par « toutes les images seront strictement inférieures à A ».

Remarque (les autres cas)
Lorsqu'on fait tendre *x* vers $-\infty$, on remplace dans les définitions « une valeur de *x* au delà de laquelle » par « une valeur de *x* en deçà de laquelle ».
Lorsqu'on fait tendre *x* vers un réel *a*, on remplace dans les définitions « une valeur de *x* au delà de laquelle » par « deux valeurs de *x* entre lesquelles ».