Compléments de dérivation et convexité

I. Compléments sur la dérivation :

Théorème capital (étudier les variations d'une fonction)
Les variations d'une fonction f sont données par le signe de sa dérivée f'.
Lorsque $f' > 0$, f est croissante, lorsque $f' < 0$ f est décroissante.
(*étudier les variations de f revient à étudier le signe de f'*)

Remarque : comment étudier le signe de f' ?
SI f' est un trinôme ou une fonction affine, on connait son signe, sinon on factorise f' et on fait un tableau de signe.

Tableau 1 :Dérivées des fonctions de référence de première.

- une fonction constante (comme $f(x) = 15$) admet pour dérivée la fonction nulle.
- les fonctions affines ($f(x) = ax + b$) ont pour dérivées $f'(x) = a$
- les fonctions $f(x) = x^n$ ont pour dérivées $f'(x) = nx^{n-1}$
  - en particulier x^2, x^3, x^4 ... se dérivent en $2x$, $3x^2, 4x^3$ ...
- la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- la fonction racine $f(x) = \sqrt{x}$ admet pour dérivée la fonction $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est égale à sa dérivée (c'est sa définition !)

Tableau 2 : Dérivée d'une somme, produit ou quotient de fonctions de référence
Soit u et v des fonctions dérivables.

Fonctions	**Dérivées**
$f = 10u$	$f' = 10u'$
$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$f = u \times v$	$f' = u' \times v + u \times v'$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$f = \frac{1}{v}$	$f' = \frac{-v'}{v^2}$
$f = e^u$	$f' = u' \times e^u$

2 exemples à connaitre : fonctions **non dérivables** en un point

- La fonction racine carré $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie en 0, mais le taux de variation en 0 tend vers $+\infty$;elle n'admet donc pas de nombre dérivé en 0.
- La fonction valeur absolue $x \longmapsto |x|$ est définie en 0, mais le taux de variation en 0 à gauche vaut -1 alors qu'à droite il vaut 1. Elle n'admet pas de nombre dérivé en 0.

Dérivée d'une fonction composée :
Soit f une fonction s'écrivant sous la forme $f(x) = g(u(x))$ ou g et u sont des fonctions dérivables.
Alors f est dérivable et admet pour dérivée $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$

Cas particuliers:

- g est la fonction exponentielle : $f(x) = e^{u(x)}$ alors $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$
- g est la fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
  en effet : $f'(x) = u'(x) \times rac'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
- g est la fonction puissance nième : $f(x) = u(x)^n$ alors $f'(x) = n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}$
  En effet $f'(x) = u'(x) \times puisn'(u(x)) = u'(x) \times n \times u(x)^{n-1} = n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}$

- u est une fonction affine : $f(x) = g(ax + b)$ alors $f'(x) = a \times g'(ax + b)$

II. Fonctions convexes, fonctions concaves

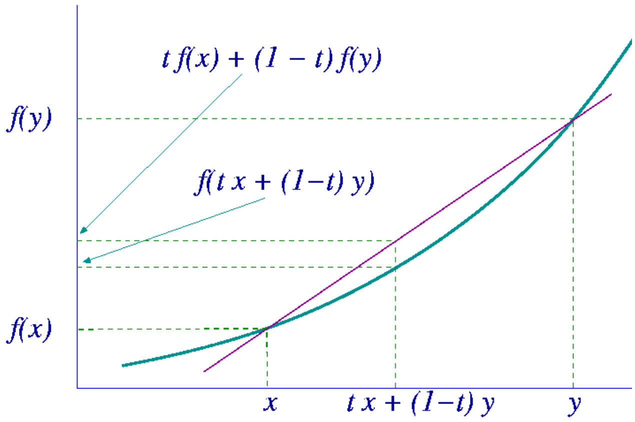
On s'intéresse à la pente de la courbe, a-t-elle tendance à augmenter ou à diminuer.

LA PROPRIETE IMPORTANTE EN PRATIQUE.
Si f est au moins deux fois dérivable (*comme c'est le cas de toutes les fonctions pour vous*)
f est convexe sur un intervalle $[a, b]$ est équivalent à $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.
f est concave sur un intervalle $[a, b]$ est équivalent à $f'' \leq 0$ sur $[a, b]$

Exemples .
$f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x \Longrightarrow f''(x) = 2$ donc la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = -e^x \Longrightarrow f'(x) = -e^x \Longrightarrow f''^{(x)} = -e^x$ donc cette fonction est concave sur $\mathbb{R}$.

Définition : (fonction convexe)
Une fonction f est convexe sur intervalle I si sa courbe est toujours en dessous de toutes ses cordes ce qui s'écrit :
Pour tous réels x et y et pour tout réel t de $[0; 1]$:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$



(*cette déf ne nécessite pas d'être dérivable, voilà pourquoi on la préfère à* $f'' \geq 0$)

Remarques :

- f est dite concave si elle est **au dessus** de ses cordes.
- f concave $\Leftrightarrow -f$ convexe, donc on n'utilise que la convexité.

Exemple : La fonction carré est convexe car
Pour tous réels x et y et pour tout réel t $(tx + (1 - t)y)^2 = t^2x^2 + (1 - t)^2y^2 + 2xyt(1 - t)$
Or $2xy \leq x^2 + y^2$
donc $(tx + (1 - t)y)^2 \leq t^2x^2 + (1 - t)^2y^2 + (x^2 + y^2)t(1 - t) = tx^2 + (1 - t)y^2$!

Propriété des tangentes :
On suppose f dérivable
f est convexe sur un intervalle $[a, b]$ est équivalent à la courbe de f est **au dessus** de ses tangentes.

Définition (point d'inflexion) :
On dit que $(a, f(a))$ est un point d'inflexion lorsque f'' s'annule et change de signe en a. En ce point la fonction passe de convexe à concave ou de concave à convexe. En ce point la tangente traverse la courbe.

Exemple :
$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f''(x) = 6x$ donc la fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$. (0,0) est un point d'inflexion, et c'est le seul.