Angles de vecteurs et trigonométrie

I) Angles

<u>Définition : (angle) :</u> Un angle orienté du plan est défini par la donnée de 2 vecteurs *(on ne se préoccupe pas de leur norme).* On note $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle qui « va » de $\vec{u}$ à $\vec{v}$.

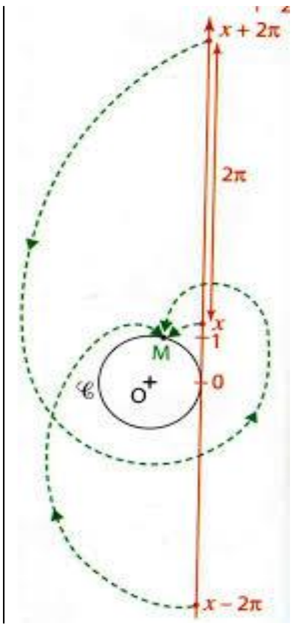
<u>Définition</u> (Une nouvelle unité pour mesurer les angles : le radian)
Une mesure en radian (*rad*) de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est la « longueur » de l'arc de <u>cercle de rayon 1</u> "joignant" $\vec{u}$ à $\vec{v}$.

<u>Remarque :</u>
- Les radians peuvent être comptés négativement, suivant que l'on tourne dans un sens ou dans l'autre.
- Un cercle de rayon 1 a un périmètre de longueur 2π. Ainsi les mesures en radians sont données généralement comme des fractions de 2π. (par exemple $\frac{2\pi}{3}$ radians)
- Les mesures en degrés et en radians sont proportionnelles, de coefficient de proportionnalité π/180.
- D'autres unités sont le "tour", le « grade » et on a les équivalences : 360° = 1 tour = 2π radians = 400 grades

<u>Définition</u> : Le cercle trigonométrique et <u>les</u> mesures d'un angle.

Dans un repère (O, I, J), on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.
Un angle possède une infinité de mesures. Lorsqu'on en connait une, les autres s'obtiennent en ajoutant $\pm k2\pi$.

En effet si on considère l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$, on peut retrouver toutes les mesures de l'angle en « enroulant » la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Toutes les mesures de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ sont alors associées au même point-image M.



<u>Définition : (orienter le plan) :</u>
Orienter le plan, c'est définir (de façon arbitrairement) un sens de rotation dit positif ou "direct"
On choisit habituellement pour sens positif le sens inverse des aiguilles d'une montre.

<u>Exemples</u> :
Si $\frac{\pi}{3}$ est une mesure d'un angle alors toutes ses mesures sont $\frac{\pi}{3} + k2\pi$: $\{\dots, -\frac{5}{3}\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{7}{3}\pi, \frac{13}{3}\pi,\ \dots\}$

<u>Remarque</u> : L'unique mesure comprise entre $]-\pi;\ \pi]$ est dite mesure principale. Pour la déterminer il faut ajouter/soustraire 2π pour obtenir un nombre dans l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$.
Ex : $\frac{188}{6}\pi = 31.33..\pi$ donc $\frac{188}{6}\pi - 32\pi = \frac{188}{6}\pi - 16(2\pi) = \frac{-2}{3}\pi$ et $-\frac{2}{3}\pi \in]-\pi;\ \pi]$

<u>Propriété</u> (relation de Chasles pour les angles)
Pour tous $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v})$
<u>Corollaire</u> :

$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$ | $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$ | $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

<u>Propriété</u> :

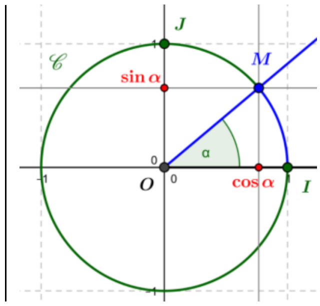
$\vec{u} \perp \vec{v} \iff (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ | $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\ [\pi]$

II) Trigonométrie

<u>Définition : (cosinus et sinus d'un angle)</u>

On considère (O, I, J) un repère du plan. Soit x une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ avec M un point du cercle trigonométrique.

- Le cosinus de x est l'abscisse de M.
- Le sinus de x est l'ordonnées de M.



$(cos(x), sin(x))$ sont donc les coordonnées de M, on a donc immédiatement

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1\,, \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad \text{et surtout} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Pour $x = \frac{\pi}{3}$, $cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{3}\, rad\right) = \cos(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin(x) = sin\left(\frac{\pi}{3}\, rad\right) = \sin(60°) = \frac{1}{2}$

<u>Remarque</u> :

Pour obtenir le cosinus d'un nombre x quelconque, on place le point-image de x sur le cercle trigonométrique et on lit son abscisse. (pour le sinus on lit l'ordonnée)

<u>Valeurs particulières à connaitre</u>

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour se rappeler ces valeurs, on peut remarquer qu'elles s'écrivent ainsi $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$

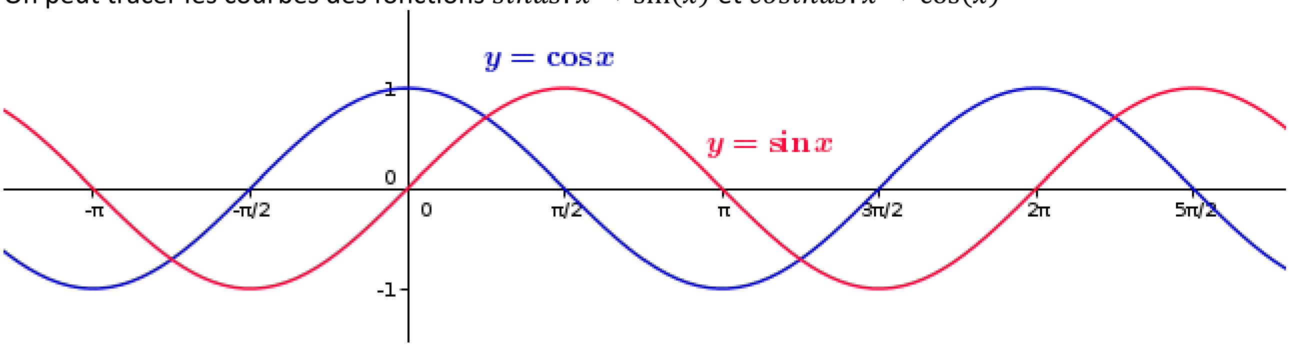
<u>Obtention de valeurs de cosinus et sinus particuliers en fonctions de valeurs connues :</u>

On peut obtenir les valeurs des cosinus et sinus d'angles « particuliers » en utilisant les symétries du cercle

$cos(-x) = cos(x)$ $sin(-x) = -sin(x)$	$cos(\pi - x) = -cos(x)$ $sin(\pi - x) = sin(x)$	$cos(\pi + x) = -cos(x)$ $sin(\pi + x) = -sin(x)$
$cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$ $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$	$cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x)$ $sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x)$	

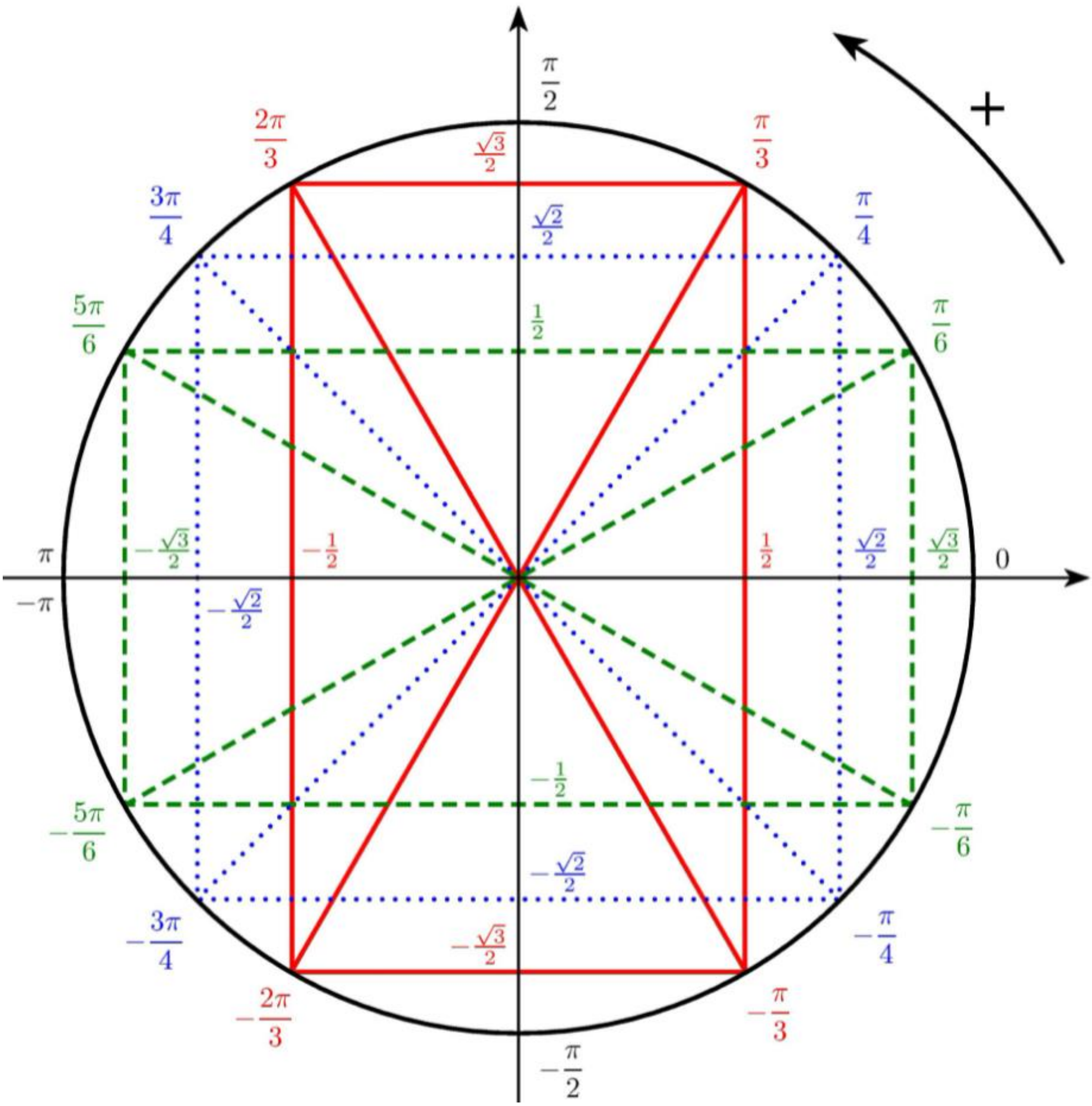
<u>Les fonctions sinus et cosinus</u>

On peut tracer les courbes des fonctions $sinus: x \to \sin(x)$ et $cosinus: x \to \cos(x)$



<u>Propriétés des fonctions :</u>

- Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π : en effet pour tout x réel on a
  - $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- La fonction sinus est impaire, en effet pour tout x réel on a $\sin(-x) = -\sin(x)$
- La fonction cosinus est paire, en effet pour tout x réel on a $\cos(-x) = \cos(x)$



+
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{1}{2}$
π
$-\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$