# La fonction exponentielle

Problème :
La croissance d'une population est proportionnelle à son effectif. On souhaite connaître son évolution en fonction du temps.

Théorème-définition :
Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est égale à sa dérivée et dont l'image de 0 est 1.
Cette fonction est notée *exp* et appelée la fonction exponentielle : $exp(0) = 1$ et $exp'(x) = exp(x)$.

Remarques
- Il s'agit de la première fonction que vous voyez qui n'a pas de formule explicite ! sa définition se résume à « c'est la seule qui… »
- La tangente à la courbe au point $(0,1)$ est $y = x + 1$

Propriété remarquable : (relation fonctionnelle caractéristique)
Pour tous réels $x$ et $y$ , on a :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Notation : (le nombre $e$, la notation $e^x$ )
La relation fonctionnelle permet d'écrire, pour tout $n$ entier : $\exp(n) = (\exp(1))^n$
On note « $e$ » le nombre $exp(1)$., la calculatrice donne $e = \exp(1) = 2.718281828548 \ldots \approx 2.7$
Ainsi on obtient $\exp(n) = e^n$
Ce qui est vrai pour un entier $n$ l'est également pour tout réel $x$ et ainsi on note $e^x$ le nombre $\exp(x)$
*(la variable x est en exposant d'où le nom exponentielle)*

Propriétés: (relations sur les puissances connues depuis la classe de 4e !)
Pour tous $x$ et $y$ de $\mathbb{R}$ :
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$ c'est la relation fonctionnelle
- $e^{x-y} = e^x \div e^y$
- $e^{-y} = 1 \div e^y$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Propriétés (positivité) : Pour tout $x$, le nombre $e^x$ est strictement positif, il n'est donc jamais nul.

Propriété : (la fonction $x \longmapsto e^x$) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Elle admet donc une fonction réciproque (c'est-à-dire une fonction qui permet de retrouver un antécédant à partir de son image), il s'agit du logarithme népérien.

Conséquences : (pour résoudre des équations et inéquations)

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \qquad\Big|\qquad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

Propriété : (fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$)
Si $u$ est une fonction dérivable, alors $x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable et sa dérivée est $x \longmapsto u'(x) \times e^{u(x)}$
En particulier les fonctions $x \longmapsto e^{kx}$ avec $k$ réel sont croissantes si $k > 0$ et décroissantes si $k < 0$

Compléments :
- Les fonctions exponentielles sont aux fonctions ce que les suites géométriques sont aux suites.
- La fonction $exp$ associe à chaque nombre de $]-\infty; +\infty[$ un unique nombre de $]0; +\infty[$. Donc il y a autant de nombres dans $]-\infty; +\infty[$ que dans $]0; +\infty[$ !!
- $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.7169 \ldots \approx e$ $\qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$