Probabilité conditionnelle

<u>Définition</u> : *(probabilité conditionnelle)*
Soit une loi de probabilité est définie sur un ensemble Ω, soit A et B sont deux événements avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $p_A(B)$, est définie par : $p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$
.
<u>Propriété</u> :
Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

1. $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$
2. $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$

<u>Règles de calcul sur l'arbre</u>

- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités marquées sur les branches.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet événement.

(sur les arbres, les proba horizontales se multiplient, les proba verticales s'ajoutent)

<u>Remarque</u> : les questions des exercices consistent souvent à inverser les arbres.

<u>Définition</u> *(partition ou système complet d'évènements)*
Dire que les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition d'un univers Ω signifie que les ensembles B_i sont deux à deux incompatibles (ensembles disjoints) et que leur réunion est Ω.

<u>Théorème des probabilités totales</u> :
Soit $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les événements formant une partition de Ω.
Alors, pour tout événement A :

$$p(A) = p(B_1) \times p_{B_1}(A) + p(B_2) \times p_{B_2}(A) + \cdots + p(B_n) \times p_{B_n}(A)$$

<u>Démonstration</u> :
Les événements $A\cap B_1, A\cap B_2, \ldots, A\cap B_n$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est A, la formule en découle.

<u>Remarque</u> : On obtient en particulier, pour tous événements A et B de Ω, $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$.

<u>Définition</u> (événement indépendants):
On dit que 2 événements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ si $p(A) \neq 0$ ou ($p_B(A) = p(A)$ si $p(B) \neq 0$)

<u>Remarque</u> : la seconde définition est plus naturelle. Cette propriété est utilisée pour construire des arbres lorsqu'on répète une expérience de façon indépendante. (loi binomiale)

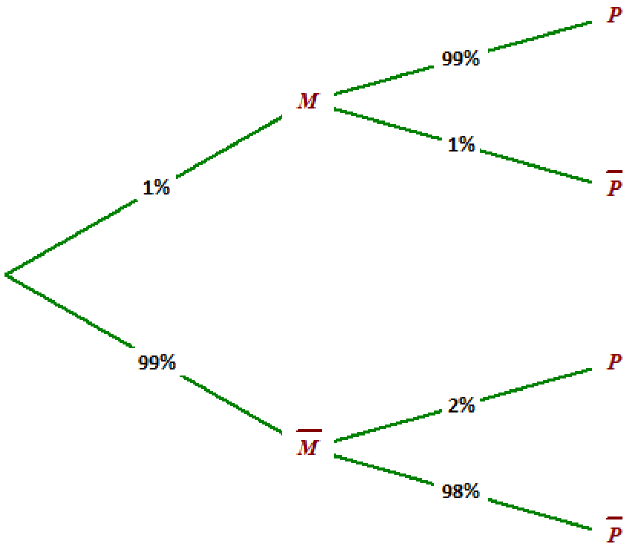
<u>Exercice</u> : (bac) Démontrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont.

Problème de référence : Test de dépistage

Le test de dépistage d'une maladie qui touche 1% de la population est tel que :

- Si un individu est malade, le test est positif dans 99% des cas.
- Si un individu est non malade, le test est négatif dans 98% des cas.

Un individu se présente avec un test positif : quelle est la probabilité qu'il soit malade ?



$$p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{0.01 \times 0.99}{0.01 \times 0.99 + 0.99 \times 0.02} = \frac{0.0099}{0.0297} = \frac{1}{3}$$

Les P sont soit des $P \cap M$ soit des $P \cap \overline{M}$. Qui sont les plus nombreux ?

- Les $P \cap M$ sont beaucoup parmi les Malades, qui eux sont très peu
- Les $P \cap \overline{M}$ sont très peu parmi les NonMalades qui eux sont très nombreux !