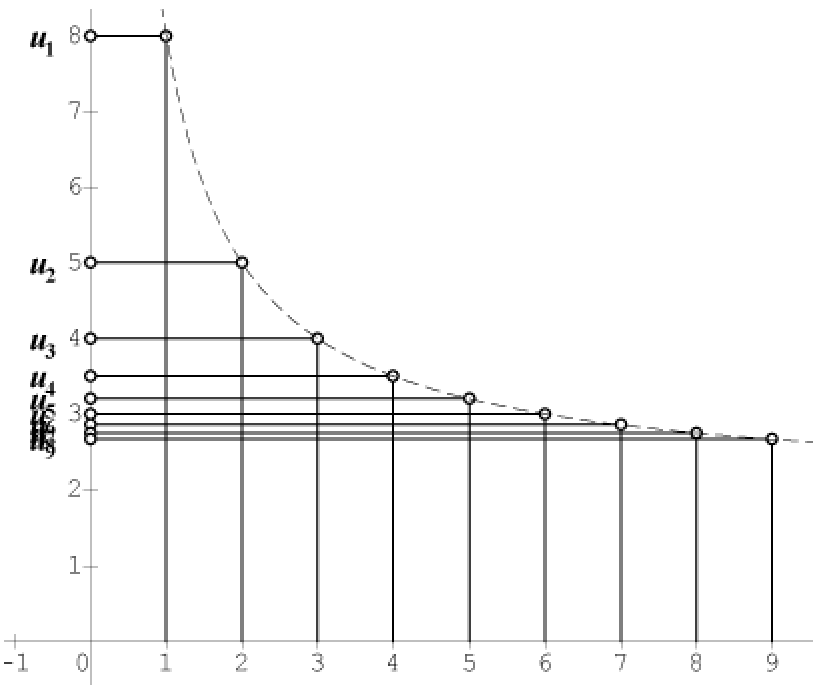
Suites de nombres

Une suite est une fonction particulière, (un type d'évolution) dont l'ensemble de définition est ℕ. *Les images sont donc numérotées, il y a une 1ère image, une 2ème , …*



<u>Définition :</u> (suite numérique)
Les nombres d'une suite ont appelés les *termes* de la suite.
On utilise également le mot *suite* pour désigner la fonction qui permet d'obtenir ces nombres. Cette fonction, notée souvent u, est définie sur $\mathbb{N} = \{0,1,2 \ldots\}$, c'est ce qui la distingue des fonctions que vous connaissez.
La suite de nombres s'écrire donc $u(0), u(1), \ldots\ldots$ ou encore u_0, u_1, u_2, u_3
u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre, le nombre du rang n. u_n est appelé terme général de la suite.
Contrairement aux fonctions que vous connaissez déjà, les images sont ici numérotées, il y a donc une image suivante, une image précédente : u_{n+1} est l'image qui suit u_n, alors u_{n-1} celle qui précède u_n.

<u>Remarque</u> : u_n est un nombre, c'est l'image de n par u, comme $f(x)$ est l'image de x par f.

<u>Particularité des suites : définition de proche de proche.</u>
Une suite u peut-être définie comme une fonction ($u(n) = 2 + 2n^2$), mais elle peut aussi être définie par une relation, appelée relation de récurrence, donnant chaque terme en fonction des termes précédents. ($u(n+1) = 2u(n) + 5$)

<u>Exemples :</u> La suite définie par [$u_0 = 105$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$] est : $u_0 = 105, u_1 = 215, u_2 = 435, \ldots$
La suite de Fibonacci est définie par [$u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$]

<u>Propriété</u> : (représentation graphique)
Une suite de nombres peut être représentée comme une fonction, son graphe est constitué des points (n, u_n)

Suites arithmétiques

Définition : On dit qu'une suite est arithmétique lorsque chaque terme s'obtient en ajoutant un même nombre, appelé raison, au terme précédent. La définition de proche en proche est donc : $u_{n+1} = u_n + r,$ avec r un réel.

Exemple : $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ est la suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

Propriété : (passage de la définition de proche en proche à une définition explicite)
$u_{n+1} = u_n + r \; et \; u_0$ donné est équivalent à $u_n = u_0 + n \times r$

Remarque : Toute suite de la forme $u_n = an + b$ (donc une fonction affine !) est arithmétique de 1er terme b et de raison a. Sa représentation graphique est donc un ensemble de points alignés !

Propriété : (lien entre les termes)
Si u est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout couple d'entiers k et p, $u_k = u_p + (k - p)r$

Remarque : Il suffit donc de connaître la raison r et l'un quelconque des termes d'une suite.

Propriété : (somme des n premiers entiers, la formule du petit Gauß)
Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Corollaire : (somme des n premiers termes d'une suite arithmétique)
La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique s'obtient à partir de la somme des n premiers entiers.

Suites géométriques

Définition : Une suite est géométrique lorsque chaque terme s'obtient en multipliant par un même nombre, appelé raison le terme précédent. La définition de proche en proche est donc $u_{n+1} = u_n \times q$, avec q un réel.

Exemple : $4, 20, 100, 500, 2500, \ldots$ est la suite géométrique de raison 5 et de premier terme 4.

Propriété : (passage de la définition de proche en proche à une définition explicite)
$u_{n+1} = u_n \times q \; et \; u_0$ donné est équivalent à $u_n = u_0 \times q^n$

Remarque : Toute suite de la forme $u_n = b \times q^n$ est géométrique de 1er terme b et de raison q.

Propriété : (lien entre les termes)
Si u est une suite géométrique de raison q, alors pour tout couple d'entiers k et p,$u_k = u_p \times q^{k-p}$

Remarque : Il suffit donc de connaître la raison q et l'un quelconque des termes

Propriété : (somme des puissances successives des n premiers entiers)
Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Sens de variation d’une suite

Définition :
Soit u une suite de nombres réels. On dit que :

- u est croissante lorsque, pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- u est décroissante lorsque, pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$

On dit que u est monotone lorsque u est croissante ou décroissante.

Certaines suites ne sont ni croissantes ni décroissantes $u_n = (-1)^n$

Techniques pour étudier les variations d’une suite définie par récurrence :

- on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow u$ est croissante
- on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 : si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow u$ est croissante

Théorème : Soit u une suite arithmétique de raison r.

- u est croissante si et seulement si $r \geqslant 0$.
- u est décroissante si et seulement si $r \leqslant 0$.
- u est constante si et seulement si $r = 0$.

Démonstration : u est croissante $\Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow r \geqslant 0$

Théorème :Soit u est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$

- u est croissante si et seulement si $q \geqslant 1$.
- u est décroissante si et seulement si $0 \leqslant q \leqslant 1$.

Remarque : Si $q \leqslant 0$, la suite oscille et n’est donc ni croissante ni décroissante.

Limite éventuelle d’une suite

On se pose ici la question du devenir des termes de la suite lorsque n grandit infiniment. La limite de la suite, si elle existe, est u_∞. Elle peut valoir $+\infty$, $-\infty$ ou une valeur finie souvent notée ℓ.

Pour connaitre des valeurs approchées de nombres comme π, $\sqrt{2}$, ..., on construit des suites qui tendent vers ces nombres.

Propriétés
Si les termes de la suite deviennent aussi proches que l’on veut d’un nombre ℓ, on dit que u converge vers ℓ.
ℓ est la limite de la suite, u_∞ existe et vaut ℓ. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$
Si les termes de la suite deviennent aussi proches que l’on veut de $+\infty$, on dit que u diverge vers $+\infty$.
$+\infty$ est la limite de la suite, u_∞ existe et vaut $+\infty$. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Si les termes de la suite deviennent aussi proches que l’on veut de $-\infty$, on dit que u diverge vers $-\infty$.
$-\infty$ est la limite de la suite, u_∞ existe et vaut $-\infty$. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemples :
La suite $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ converge vers 2.
La suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ converge vers $\sqrt{2}$
La suite $u_n = 2n + n^2$ diverge vers $+\infty$
La suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ diverge vers $+\infty$.

La suite $u_n = (-1)^n$ n’a pas de limite !