Sens de variation d'une fonction, optimisation

La fonction dérivée f' d'une fonction f permet de connaitre les variations de f et donc les maximums et minimums

Théorème (LE THEOREME FONDAMENTAL)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ (et éventuellement nulles quelquefois) , alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout x de I , $f'(x) < 0$ (et éventuellement nulles quelquefois) , alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Exemple 1: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^2 - 4x + 3$
f est une fonction polynôme , elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 4$
Le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction. Étudions ce signe !
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ f' est strictement positif uniquement lorsque $x > 2$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ *(inutile en fait)*
Sur $]2\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.
Sur $]-\infty, 2[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.

Tableau de variation

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

Exemple 2:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 9$
f est une fonction polynôme , elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,
$f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
Le signe de la dérivée nous donne le sens de variation
$f'(1) = 0$ et pour tout réel $x \neq 1$, $f'(x) > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ *(la dérivée ne s'annule que pour un seul réel (1))*

Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		↗	

Remarques :

- Les flèches du tableau signifient strictement croissante (ou strictement décroissante).
- Il est important de se placer sur un intervalle.

Exemple 3:
La fonction inverse $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$,
Le signe de la dérivée donne le sens de variation.
Attention on ne peut pas dire que f est décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ car ce n'est pas un intervalle
Sur l'intervalle $]-\infty\,; 0[$ $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.
Sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$ $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

Remarque :
Le tableau de variation permet d'encadrer des images et de donner le nombre de solution d'équation du type $f(x) = k$

Optimisation : On obtient les maxima et les minima d'une fonction à l'aide des variations : si f est croissante puis décroissante, elle admet un maximum local (une bosse !)

Théorème : Si f' s'annule et change de signe, alors f admet un extremum local.