Vitesse de variation d'une fonction
La dérivation

I. Nombre dérivé (pente de la courbe de $\boldsymbol{f}$ au point $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$)

Définition : (taux de variation)
On appelle taux de variation de f entre $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ le coefficient directeur de la droite (AB), c'est-à-dire le nombre :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Définition : (Nombre dérivé)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel de I. On s'intéresse à la pente de la courbe au point $A(a, f(a))$. On imagine un point mobile sur la courbe, le point $M(a+h, f(a+h))$ où h est un (petit) nombre réel.(si $h > 0$, M est à droite de A et si $h < 0$, M est à gauche de A).
La valeur de la pente en $A\big(a, f(a)\big)$, appelée nombre dérivé de f en a et notée $f'(a)$, est, s'il elle existe, l'unique valeur « limite » du taux variation entre A et M lorsque h tend vers 0, c'est-à-dire la valeur limite du nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Si cette limite existe, et vaut pas $\pm\infty$ on note :

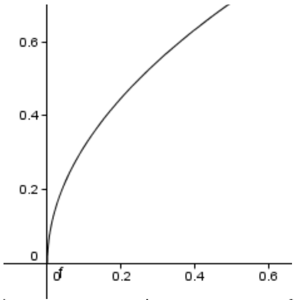
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

On dit que f est dérivable en a si f admet un nombre dérivé en a.(f admet une pente en a)
On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout nombre a de I.

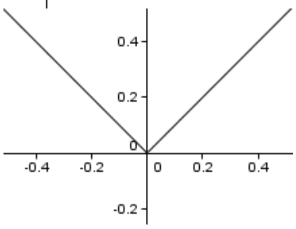
La notion de dérivée a vu le jour au XVII^{e} siècle dans les écrits de Leibniz et de Newton qui la définit ainsi :le quotient ultime de deux accroissements.

Exemples de fonctions non dérivable en un point.

- Si la limite du taux de variation vaut ±∞, le nombre dérivé n'existe pas et la fonction n'est pas dérivable en ce nombre.
  Exemple : le taux de variation de $x \longmapsto \sqrt{x}$ en 0 admet pour limite +∞. La fonction n'est donc pas dérivable en 0.



- Il faut vérifier que la limite à gauche (h>0) est la même que la limite à droite (h>0). Sinon la fonction n'est pas dérivable.
  Exemple : le taux de variation de $x \longmapsto |x|$ en 0 admet -1 pour limite à gauche (h<0) et admet 1 pour limite à droite (h>0). La fonction n'est donc pas dérivable en 0.



Autres formulations possibles : chercher $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est équivalent à chercher $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Définition : (droite tangente à la courbe en un point)
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en a est la droite passant par $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ (si ce nombre existe)
Cette droite admet pout équation $y = \boldsymbol{f'(a)}\, x + (f(a) - af'(a))$
qu'il est plus facile de retenir ainsi : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

II. Fonction dérivée

Définition :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction dérivée de f est la fonction **notée f'**. À tout réel x de I elle associe le nombre dérivé $f'(x)$ *(la pente de la courbe en x)*. On appelle domaine de dérivabilité de f, $D_{f'}$, l'ensemble des valeurs du domaine de définition de f qui admettent un nombre dérivé.

Remarque :
Le domaine de dérivabilité est le domaine de définition privé des valeurs qui n'admettent pas de nombre dérivé.

Tableau 1 :Dérivées des fonctions de référence de première.

- une fonction constante ($f(x) = 15$) admet pour dérivée la fonction nulle $f'(x) = 0$. $D_{f'} = D_f$
- les fonctions affines $f(x) = ax + b$ ont pour dérivées $f'(x) = a$, $D_{f'} = D_f$
- les fonctions $f(x) = x^n$ ont pour dérivées $f'(x) = nx^{n-1}$, $D_{f'} = D_f$
  - en particulier x^2, x^3, x^4 ... se dérivent en $2x$, $3x^2, 4x^3$ ... $D_{f'} = D_f$
  - en particulier $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$, ...se dérivent en $-\frac{1}{x^2}, -\frac{2}{x^3}, -\frac{3}{x^4}, \ldots$, $D_{f'} = D_f$
- la fonction racine $f(x) = \sqrt{x}$ admet pour dérivée la fonction $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, *attention* $D_{f'} = D_f \setminus \{0\}$

Démonstration :
Le taux de variation de la fonction « carré » exprimé en un nombre a quelconque s'écrit :

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{(a+h-a)(a+h+a)}{h} = 2a + h$$

Lorsque h tend vers 0, le nombre $2a + h$ tend vers $2a$. Donc la fonction dérivée de la fonction « carré » est la fonction « double ».

Tableau 2 : Dérivée d'une somme, produit ou quotient de fonctions de référence
Soit u et v des fonctions dérivables.

Fonctions	**Dérivées**
$f = 10u$	$f' = 10u'$
$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$f = u \times v$	$f' = u' \times v + u \times v'$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$f = \frac{1}{v}$	$f' = \frac{-v'}{v^2}$

Remarques :
Les fonctions polynômes et rationnelles sont dérivables sur tout intervalle de leur domaine de définition.

Exemples (composition de fonctions).
La fonction $f(x) = \sqrt{2x+3}$ est l' « enchainement », la « composition » de 2 fonctions. D'abord la fonction affine $x \longmapsto 2x + 3$ puis la fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$.
La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x+8}}$ est l' « enchainement » de 3 fonctions. D'abord la fonction affine $x \longmapsto 5x + 8$ puis la fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ et enfin la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$
Propriété (dérivée d'une composition de fonctions).
Lorsque f est l'enchainement de 2 fonctions dont la première est une fonction affine $x \longmapsto ax + b$ et la deurxième une fonction quelconque notée u, donc $f(x) = u(ax + b)$, alors on a

$$f'(x) = a \times u'(ax + b)$$