Chap 8 Comportement asymptotique d'une fonction

Table des matières

Soit f une fonction définie sur D
On étudie en général les valeurs que peut prendre $f(x)$ lorsque x se rapproche des bornes de D.

Exemple : Si $D\ =]-\infty; 3[\cup]3\,;+\infty[$ on étudie les valeurs que prend $f(x)$ lorsque x se rapproche de -∞ , 3, +∞

La définition de la limite d'une fonction sera vue en terminale, ici l'intuition

I. Lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

1. *$f(x)$ tend vers une valeur finie*

Exemple : $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ;+\infty[$ on étudie ici en $+\infty$ et $-\infty$

On dit que $\frac{1}{x}$ tend vers 0 (ou a pour limite 0) lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

On dit que $f(x)$ a pour limite 0 en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Propriété (admises)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, pour $n > 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ *$\sqrt{x}$ se note aussi $x^{\frac{1}{2}}$ ce qui généralise la règle précédente aux puissances non entières*

Définition   (*asymptote horizontale)*
Soit b est un réel. On note $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f.
On dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (ou $-\infty$) lorsque
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - b) = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - b) = 0$)

Exemple : La courbe de la fonction $x \longmapsto 2 + \frac{1}{x}$ admet la droite d'équation $y = 2$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interprétation graphique :
La courbe de f se rapproche infiniment près (aussi près que l'on veut) de son asymptote lorsque x devient grand

Exercice : $f : x \longmapsto 2 + \frac{1}{x}$
A partir de quelle valeur de x l'écart entre le courbe et l'asymptote n'excède t-il pas 10^{-3} ?

2. *$f(x)$ tend vers une valeur infinie*

Exemple : $f : x \longmapsto x^2$ et $D_f = \mathbb{R} =]-\infty\ ;+\infty[$ on étudie ici en $+\infty$ et $-\infty$
On dit que x^2 tend vers $+\infty$ (a pour limite $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
On dit que …

Propriété (admises)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, pour $n > 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Définition   (*asymptote oblique)*
Soit a et b sont des réels. On note $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f.
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (ou $-\infty$) lorsque
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$)

Exemple :

La courbe de la fonction $x \longmapsto 2x + 1 + \frac{1}{x}$ admet la droite d'équation $y = 2x + 1$ comme asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interprétation graphique :
La courbe de f se rapproche infiniment près (aussi près que l'on veut) de son asymptote lorsque x devient grand. $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0$

Remarque : une asymptote horizontale est un cas particulier d'asymptote oblique.

II. Lorsque x tend vers un réel x_0, borne du domaine de définition

1. $f(x)$ tend vers une valeur finie

très simple, on ne s'y intéresse guère.

Exemple : $x \longmapsto 2x + 1$ définie sur]1 ; 2 [. on a $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$

2. $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Exemple : $f : x \longmapsto \frac{1}{x-7}$ et D_f =]-∞ ; 7[∪]7 ;+∞[on étudie ici en 7

On dit que $\frac{1}{x-7}$ tend vers $+\infty$ (a pour limite $+\infty$) lorsque x tend vers 7 par la droite et on note $\lim\limits_{\substack{x\to 7 \\ x>7}} \frac{1}{x-7} = +\infty$

On dit que $\frac{1}{x-7}$ tend vers $-\infty$ (a pour limite $-\infty$) lorsque x tend vers 7 par la gauche et on note $\lim\limits_{\substack{x\to 7 \\ x<7}} \frac{1}{x-7} = -\infty$

Remarque : la notation "$x \to 7;\ x < 7$" et parfois remplacée par "$x \to 7^-$"

Propriété (admises)
Lorsque x tend vers un réel x_0 :

- Si g(x) tend vers 0 avec g(x)>0, alors $\frac{1}{g(x)}$ tend vers +∞
- Si g(x) tend vers 0 avec g(x)<0, alors $\frac{1}{g(x)}$ tend vers -∞

Définition (*asymptote verticale)*
Soit a est un réel. On note $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$ en a lorsque
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$
ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Exemple :
Toutes les fonctions homographiques $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (qui peuvent s'écrire $\frac{A}{cx+d} + B$) admettent des asymptotes verticales en $-\frac{d}{c}$.

III. Règles opératoires et formes indéterminées

A partir des résultats connus sur les limites simples (fonctions de références) on en déduit les limites de sommes ou de produits ou de quotients de fonctions simples.
Parfois on ne peut pas déduire le résultat, on se trouve en présence d'une forme indéterminée

On considère que f et g ont le même ensemble de définition. ℓ et ℓ' désignent deux réels.

1. Limite d'une somme de fonctions

La somme étant commutative, le tableau est symétrique, on ne remplit que la moitié.

	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	g a pour limite
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	
$+\infty$		$+\infty$	FI	
$-\infty$			$-\infty$	
f a pour limite				

2. Limite d'un produit de fonctions

La produit étant commutatif, le tableau est symétrique, on ne remplit que la moitié.

	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	g a pour limite
ℓ'	$\ell\ell'$	$+\infty$ si $\ell'>0$ $-\infty$ si $\ell'<0$ FI si $\ell=0$	$-\infty$ si $\ell'>0$ $+\infty$ si $\ell'<0$ FI si $\ell=0$	
$+\infty$		$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$			$+\infty$	
f a pour limite				

3. Limite de l'inverse

g a pour limite	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
1/g a pour limite	$1/\ell$ si $\ell\neq 0$ $+\infty$ si $\ell=0$ et $g>0$ $-\infty$ si $\ell=0$ et $g<0$	0	0

4. Limite d'un quotient

On se ramène à un produit par l'inverse

5. ***Exemple de rédaction***.

Étudier la limite en $+\infty$ de $x \to \dfrac{2+\frac{1}{x}}{x(3+\frac{1}{x})}$. *($+\infty$ est une borne de l'intervalle, il est justifié d'étudier la limite)*

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$ d'après les <u>règles opératoires du produit</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} x(3 + \frac{1}{x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x(3 + \frac{1}{x}) = +\infty$ d'après les <u>règles opératoires du quotient</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{x(3+\frac{1}{x})} = 0$

6. ***Le cas des formes indéterminées.***

Les formes indéterminées sont de 4 types:

$" \to \pm\infty" \pm " \to \pm\infty"$	$\dfrac{" \to \pm\infty"}{" \to \pm\infty"}$	$\dfrac{" \to 0"}{" \to 0"}$	$" \to 0" \times " \to \pm\infty"$

Dans ce cas, il est nécessaire, pour trouver la limite cherchée, de procéder à des calculs supplémentaires ou d'utiliser des propriétés connues.

<u>Exemple</u> :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x$ est une forme indéterminée du type : $"\to+\infty" - " \to +\infty"$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-6}{x^2+5x-7}$ une forme indéterminée du type $\dfrac{"\to+\infty"}{"\to+\infty"}$. On ne peut pas conclure avec les régles opératoires.

<u>Théorème</u> :

- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

<u>Exemples</u> :

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 + 15x^2 - 5x + 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-6}{x^2+5x-7} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$